

Spezielle Relativitätstheorie

Grundprinzipien

1. Relativitätsprinzip:

Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen die gleiche Form an.

2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in jedem Inertialsystem den Wert $c = 300000 \text{ km/s}$ (genau $c = 299793 \text{ km/s}$).

3. Synchronisation von Uhren – Gleichzeitigkeit

Um zwei Uhren zu synchronisieren, werden in deren geometrischer Mitte zwei Lichtsignale gleichzeitig ausgesandt, die bei ihrer Ankunft die beiden Uhren in Gang setzen.

Das **Relativitätsprinzip** gilt auch schon in der klassischen Mechanik:

Solange man sich in einem nicht beschleunigten System (Inertialsystem) befindet, laufen alle Experimente gleich ab.

Beispiel: Wenn man einen Ball senkrecht hochwirft, kann man ihn direkt an derselben Stelle wieder auffangen. Das funktioniert auch z.B. in einem Zug, der mit gleichförmiger Geschwindigkeit genau geradeaus fährt. Es funktioniert aber nicht, wenn der Zug z.B. um eine Kurve fährt. (beschleunigtes System)

Die **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** scheint dem „gesunden Menschenverstand“ zu widersprechen:

Es ist doch „klar“: Wenn ich einen Ball mit der Geschwindigkeit 6 m/s von einem Fahrrad mit der Geschwindigkeit 4 m/s nach vorne werfe, dann beobachtet ein am Wege stehender Mensch den Ball mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s .

Das sollte auch für die Lichtgeschwindigkeit gelten: Der am Wege stehende Mensch sollte mein Vorderlicht, das meinen Scheinwerfer mit Lichtgeschwindigkeit verlässt, mit Lichtgeschwindigkeit plus Fahrradgeschwindigkeit messen.

Beides erscheint sehr plausibel, ist jedoch – wenn man sehr genau misst – falsch.

Dies wurde schon 1887 u.a. von Michelson-Morley nachgewiesen:

Sie maßen die Geschwindigkeit von Licht, das der Erde, die sich mit ca. 30 km/s um die Sonne dreht, entgegenkam und Licht, das sich entfernte. Die Messung ergab (im Rahmen der Messgenauigkeit (heute 10^{-17})) immer denselben Wert. Auch Überlegungen aus den Maxwell-Gleichungen legten nahe, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum immer die gleiche ist.

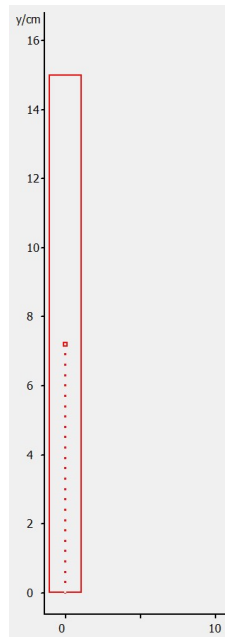
Die Definition der **Synchronisation von Uhren** erscheint plausibel, da es kein schnelleres Signal als die Lichtgeschwindigkeit gibt und kein System bevorzugt werden soll.

Die Lichtuhr

Die Lichtuhr ist ein Denkkonzept, das beim Verständnis der speziellen Relativitätstheorie sehr hilfreich ist. In der Folge ist das schwarze System in den Bildern immer das „ruhende“. (relativ zum Leser)

Die Lichtuhr besteht aus zwei gegenüberliegenden Spiegeln (oben und unten), zwischen denen ein Lichtblitz hin- und herläuft. Die Reflexionen am unteren Spiegel werden gezählt. Wählt man als Spiegelabstand 15 cm, so zählt die Uhr also Nanosekunden.

(mit $c = 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{cm}}{\text{ns}}$)



Die Zeitdilatation – bewegte y-Lichtuhr

t_0 : Zeit des ruhenden Beobachters

$c \cdot t_0$: Signalweg für den ruhenden Beobachter

$v \cdot t_0$: von der Lichtuhr zurückgelegte Strecke

t_1 : Zeit des bewegten Systems

$c \cdot t_1$: Signalweg für den mitbewegten Beobachter

Nach Pythagoras:

$$(c \cdot t_0)^2 = (c \cdot t_1)^2 + (v \cdot t_0)^2$$

$$(t_0)^2 = (t_1)^2 + \left(\frac{v}{c} \cdot t_0\right)^2$$

Also:

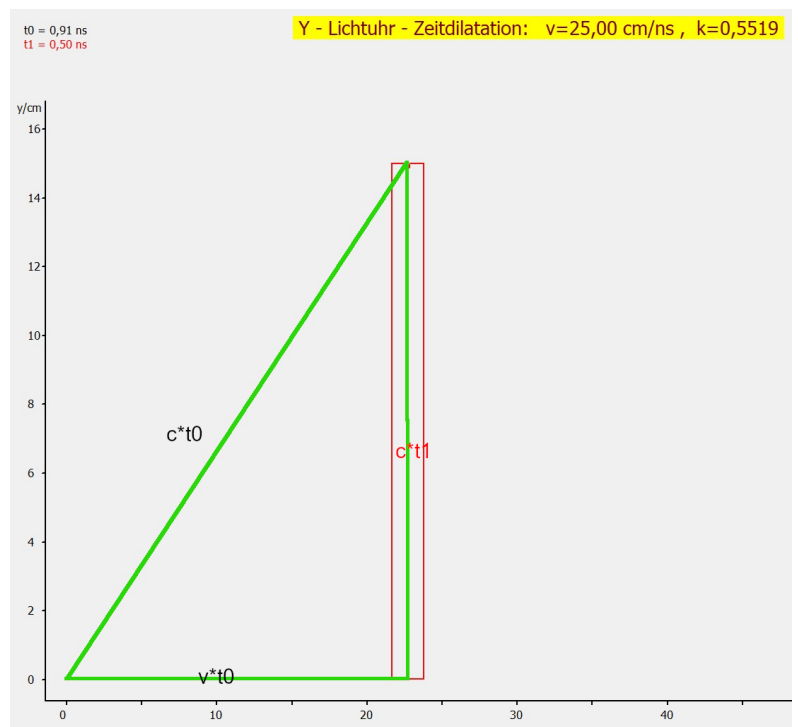
$$t_1 = t_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

(Zeitdilatation)

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Im Bild ist im bewegten, roten System genau die Zeit $t_1 = 0,5 \text{ ns}$ vergangen. Damit ist $k = 0,5519$ und $t_0 = 0,91 \text{ ns}$.

Oder kurz: „Bewegte Uhren gehen langsamer!“



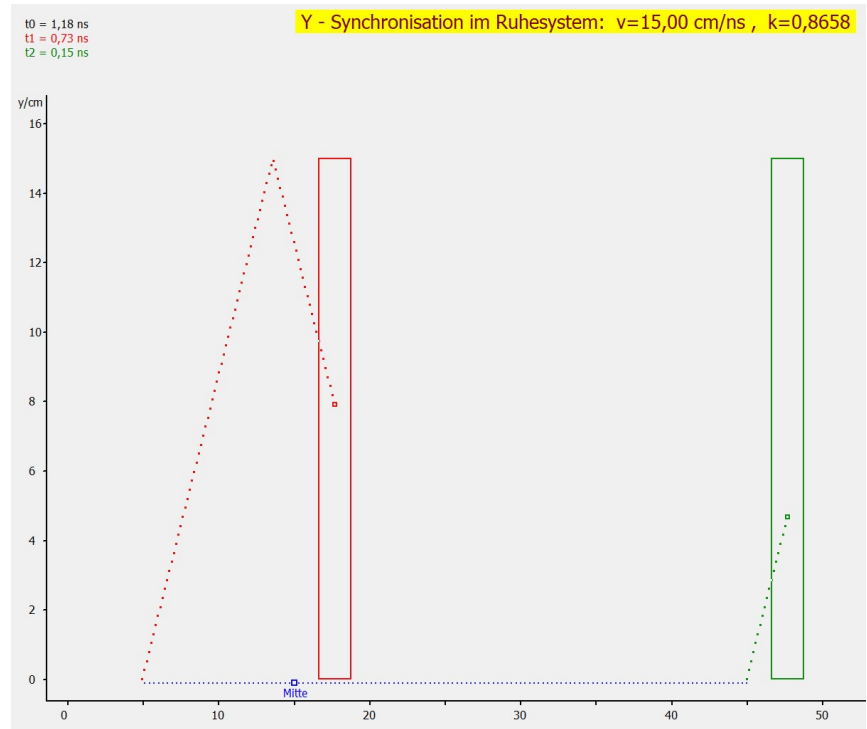
Beispiele zur Zeitdilatation

Um eine merklich Zeitdilatation zu haben muss die Systemgeschwindigkeit v nahe an der Lichtgeschwindigkeit c liegen, da sonst der Faktor k nicht merklich von 1 abweicht und man also praktisch keinen Effekt beobachten kann. Alle folgenden Beispiele sind für die Zeit auf 4 Stellen nach dem Komma gerundet.

1. Auto auf der Autobahn von Kiel nach München:
Das Auto fährt mit $100 \text{ km/h} = 27,8 \text{ m/s}$ 10 Stunden lang (gemessen in einer Autobahnraststätte). Damit ist $t_0 = 10 \text{ h} = 36000 \text{ s}$. Eingesetzt in obige Formel ergibt sich: $t_1 = 36000 \text{ s}$. Also kein sichtbarer Effekt.
2. Flugzeug auf dem Flug von Hamburg nach New York:
Das Flugzeug fliegt mit $800 \text{ km/h} = 222,2 \text{ m/s}$ 10 Stunden lang (gemessen im Flughafen Hamburg). Damit ist $t_0 = 10 \text{ h} = 36000 \text{ s}$. Eingesetzt in obige Formel ergibt sich: $t_1 = 36000 \text{ s}$. Also auch kein merkbarer Effekt für die Fluggäste.
3. Apollo 11 auf dem Weg von der Erde zum Mond:
Die Reise zum 384.403 Kilometer entfernten Mond dauerte 76 Stunden (gemessen auf der Erde). Die mittlere Geschwindigkeit betrug also $5057,9 \text{ km/h} = 1405 \text{ m/s}$. Damit ist $t_0 = 76 \text{ h} = 273600 \text{ s}$. Eingesetzt in obige Formel ergibt sich: $t_1 = 273600 \text{ s}$. Selbst hier ist kein merklicher Effekt.
4. New Horizons: NASA-Raumsonde (Plutosystem):
Maximalgeschwindigkeit: $v = 83600 \text{ km/h} = 23222,2 \text{ m/s}$. Selbst bei dieser Geschwindigkeit ist der relativistische Effekt nur marginal!
5. Wenn Höhenstrahlung beim Eintauchen in die Erdatmosphäre mit Luftatomen kollidiert, entstehen u.a. sog. Myonen. Sie haben eine mittlere Lebensdauer von nur etwa $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, entstehen etwa 12,5 km über dem Erdboden und bewegen sich mit etwa 99,92-prozentiger Lichtgeschwindigkeit auf die Erde zu. Dann können sie etwa 0,5 km zurücklegen, aber es kommen ca. die Hälfte von ihnen am Erdboden an!
Erklärung: Da jedes Myon mit 99,92-prozentiger Lichtgeschwindigkeit auf die Erde zukommt, verlangsamt sich die "Uhr" in den Myonen um den Faktor $k = 25$. Somit leben sie 25 mal so lang wie aus ihrer eigenen Sicht und können so $25 \cdot 500 \text{ m} = 12500 \text{ m}$ zurücklegen, bevor sie zerfallen.
6. Untersuchungen in Speicherringen (z.B. DESY Hamburg, CERN Genf) bestätigen die Zeitdilatation sehr genau.

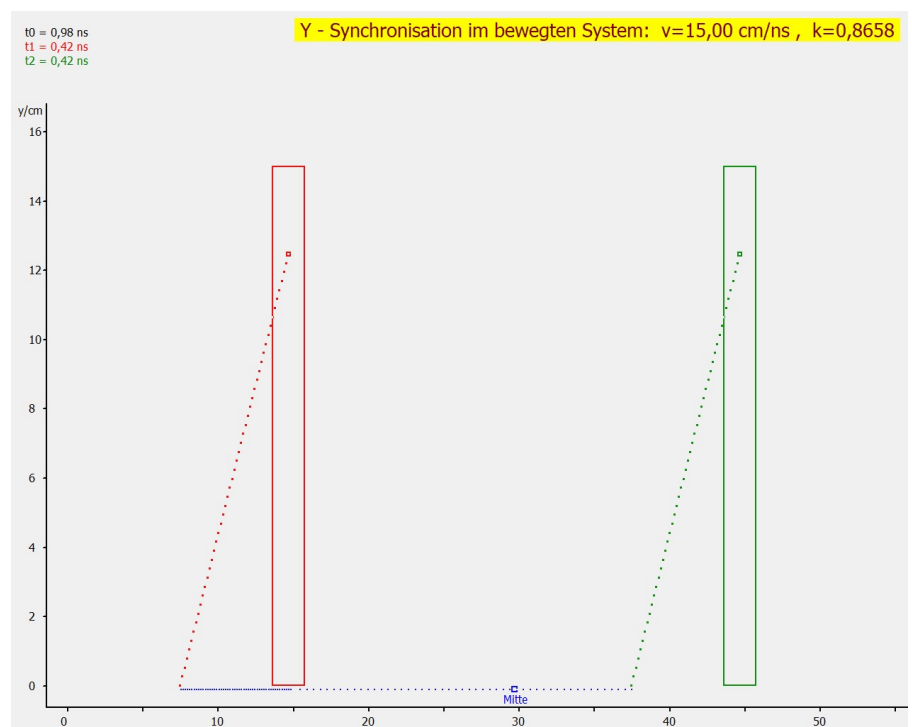
Y - Synchronisation im Ruhesystem

Aus dem (schwarzen) Ruhesystem heraus betrachtet erreicht ein Lichtblitz, der in der Mitte gestartet wird, die Systeme (rot und grün) nicht zur gleichen Zeit, da die Systeme sich fortbewegen. Deshalb laufen die Uhren nicht synchron, sie zeigen verschiedene Zeiten an. Die Uhren laufen nicht synchron.
nicht gleichzeitig



Y - Synchronisation im bewegten System

Das rote und grüne System bewegen sich gemeinsam nach rechts. Aus diesem bewegten System heraus betrachtet erreicht ein blauer Lichtblitz, der in der Mitte gestartet wird, die Systeme (rot und grün) zur gleichen Zeit, da die Systeme sich gemeinsam fortbewegen. Deshalb laufen die Uhren synchron.
gleichzeitig



Oder kurz: Gleichzeitigkeit ist relativ!

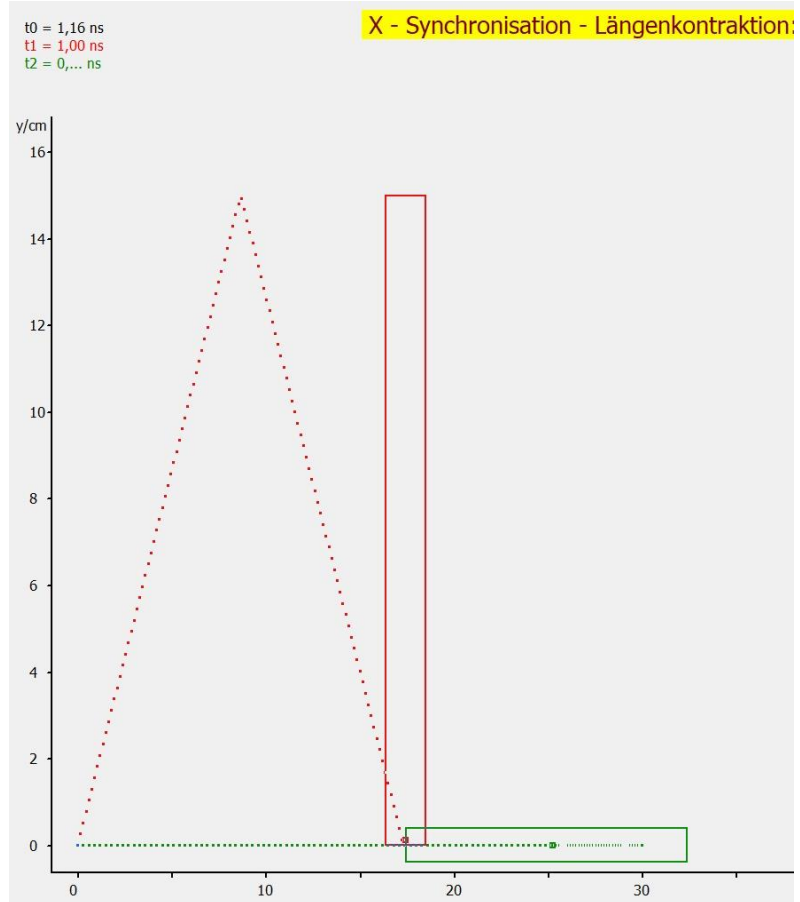
Die Lorentz-Kontraktion – bewegte x-Lichtuhr

Wenn man bedenkt, dass die Maßstäbe auf den Achsen sehr verschieden sind sieht man:
Die rote Uhr ist 15 cm lang, die grüne auch. Beide bewegen sich gemeinsam nach rechts (vom schwarzen System aus gesehen), und sie wurden zur gleichen Zeit in ihrem System gestartet. Sie sollten also synchron laufen!

Offensichtlich tun sie es nicht, der Grund:
Die grüne Uhr ist zu lang, offenbar muss sie verkürzt werden!

Längenkontraktion!

Mit einiger Erfahrung ahnt man:
Der Kontraktionsfaktor ist wie bei der Zeitdilatation k , denn bei der Division muss wieder die gleiche Geschwindigkeit herauskommen.



Die Lorentz-Kontraktion – bewegte x-Lichtuhr – Berechnung

- l_2 : Länge der grünen Lichtuhr für den ruhenden (schwarzen) Beobachter
- t_2 : Zeit zum Überfliegen des Nullpunkts mit der ganzen, grünen Lichtuhr für den ruhenden (schwarzen) Beobachter
- v : Geschwindigkeit des grünen Systems aus Sicht des schwarzen

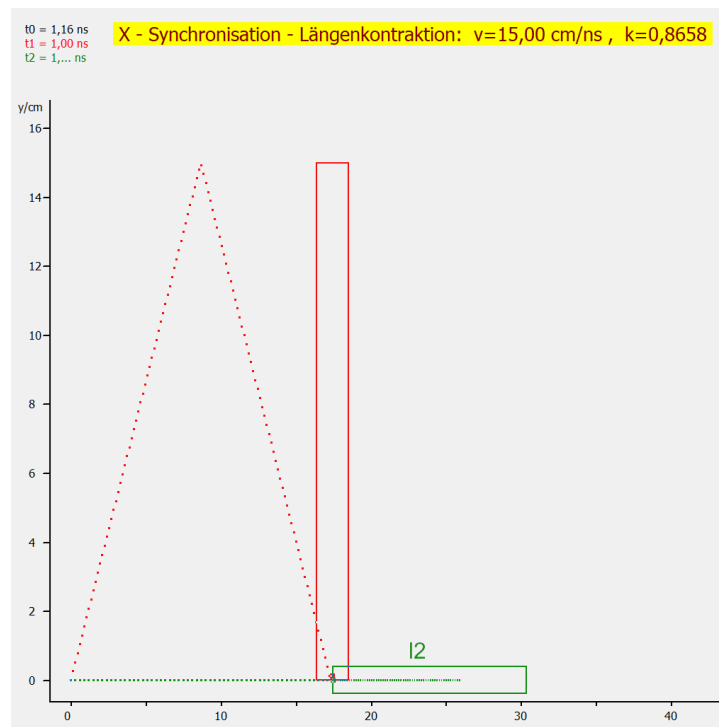
$$v = \frac{l_2}{t_2} \rightarrow l_2 = v \cdot t_2, \quad t_2 = t_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$l_2 = v \cdot t_2 = v \cdot t_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$l_2 = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

(Längenkontraktion)

$$k = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$



Im Bild: $t_1 = t_2 = 1 \text{ s}$, $l_2 = 12,99 \text{ cm}$

Der Dopplereffekt

Eine Quelle sendet Signale im Zeitabstand T_1 aus, die ein Empfänger registriert, der sich vom Sender mit der Geschwindigkeit u entfernt. Während der Zeit T_1 legt der Empfänger die Strecke $u \cdot T_1$ zurück, vom Sender aus gesehen kommt das zweite Signal daher um $T_1 + u \cdot T_1/c$ später als das erste am Empfänger an. Wegen der Zeitdilatation erscheint der Zeitabstand vom Sender aus betrachtet länger. Am

Empfänger ist der Zeitabstand daher $T_2 = \left(T_1 + \frac{u \cdot T_1}{c} \right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2}$

$$T_2 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{(c+u)}{(c-u)}}$$

$$f_2 = f_1 \cdot \sqrt{\frac{(c-u)}{(c+u)}}$$

Die Geschwindigkeitsaddition

Zusätzlich zur Situation beim Dopplereffekt sendet der Empfänger E_1 im Abstand T_2 Signale aus, die ein Empfänger E_2 , der sich relativ zum ersten Empfänger E_1 mit der

Geschwindigkeit v bewegt, empfängt. $T_3 = T_2 \cdot \sqrt{\frac{(c+v)}{(c-v)}} = T_1 \cdot \sqrt{\frac{(c+u)}{(c-u)}} \cdot \sqrt{\frac{(c+v)}{(c-v)}}$

Relativ zum Sender S bewegt sich E_2 mit der Geschwindigkeit w .

$$T_3 = T_1 \cdot \sqrt{\frac{(c+w)}{(c-w)}}$$

$$T_1 \cdot \sqrt{\frac{(c+w)}{(c-w)}} = T_1 \cdot \sqrt{\frac{(c+u)}{(c-u)}} \cdot \sqrt{\frac{(c+v)}{(c-v)}}$$

$$w = \frac{u+v}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}}$$

Die Massenzunahme

Zwei Käfer gleicher Masse m_0 laufen auf einer Balkenwaage gleich schnell (Geschwindigkeit u) vom Drehpunkt nach außen. Aus Sicht des linken Käfers bewegt

sich der rechte mit der Geschwindigkeit $v = \frac{2u}{1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2} \rightarrow 1 + \frac{u^2}{c^2} = \frac{2u}{v}$

Ferner ist der linke Käfer nach der Zeit t um $u \cdot t$ vom Drehpunkt entfernt, der rechte vom linken um $v \cdot t$ und um $(v - u) \cdot t$ vom Drehzentrum entfernt ist. Damit die Waage im Gleichgewicht bleibt muss nach der Zeit t gelten:

$$m_0 \cdot u \cdot t = m \cdot (v - u) \cdot t \rightarrow u = \frac{m}{m + m_0} v$$

Eingesetzt folgt:

$$1 + \left(\frac{m}{m + m_0}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2m}{m + m_0}$$

Umgeformt

$$\left(\frac{m + m_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{m + m_0}{m}\right) = 0$$

Einzig sinnvolle Lösung

$$1 + \frac{m_0}{m} = 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{dynamische Masse}$$

Die relativistische Gesamtenergie und die Masse

$$E_{\text{ges}} = m \cdot c^2 = m_0 c^2 + E_{\text{kin}} \quad (\text{verwende Binom. Lehrsatz})$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0 v^4}{c^2} + \dots$$

Die relativistische Gesamtenergie und der Impuls

$$E_{\text{ges}} = \sqrt{(m_0 \cdot c^2)^2 + p^2 \cdot c^2}$$

(p : relativistischer Impuls)

$$p = m \cdot v$$

(Herleitung:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow m^2 = \frac{m_0^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \rightarrow m^2 = \frac{m_0^2 \cdot c^2}{c^2 - v^2} \rightarrow m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 \cdot c^2 \rightarrow$$

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m_0^2 \cdot c^4 \rightarrow (\text{mit } p = m \cdot v) \quad m^2 c^4 - p^2 c^2 = m_0^2 \cdot c^4 \rightarrow (E = m \cdot c^2)$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

Geschrieben von Jürgen Kirchmayr, 10.11.2019